MAT4111

Premier semestre — 2021–2022

Fiche 5: Corps de décomposition, clôtures algébriques

1. Soient K un corps et $P \in K[X]$ un polynôme irréductible de degré n. Soit L une extension finie de K de degré m premier avec n. Montrer que P est irréductible dans $L[X]$.

⋆ **2.** Soit $P \in K[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et L un corps de décomposition de P. Montrer que $[L : K]$ divise $n!$.
Indication : procéder par récurrence forte, en distinguant selon que P est irréductible ou non.

3. Soient K un corps et $K(T)$ son corps des fractions rationnelles.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $X^n - T \in K(T)[X]$ est irréductible.

(b) Montrer que $K(T)$ n'est pas algébriquement clos.

(c) Soit L une clôture algébrique de $K(T)$. L'extension $L \supseteq K(T)$ peut-elle être finie ?

4. (a) Soit $L \supseteq K$ une extension algébrique. Montrer que toute clôture algébrique de L est aussi une clôture algébrique de K.

(b) Soit $L \supseteq K$ une extension algébrique telle que tout $P \in K[X] \setminus K$ est scindé dans L. Montrer que L est une clôture algébrique de K.

⋆ **5.** (a) Montrer que tout corps algébriquement clos est de cardinalité infinie.

(b) Soit K un corps fini. Montrer que l'ensemble des polynômes irréductibles de $K[X]$ est infini.

(c) Soit Ω un corps algébriquement clos et K un sous-corps de Ω. Montrer que

$$E = \{x \in \Omega | x \text{ est algébrique sur } K\}$$

est une clôture algébrique de K.

(d) Soit K un corps de cardinalité au plus dénombrable et L une clôture algébrique de K. Montrer que L est dénombrable.

(e) Le corps $\bar{\mathbb{Q}}$ est-il algébriquement clos ?

(f) Soit $\overline{\mathbb{Q}(T)}$ une clôture algébrique du corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}(T)$. Montrer que $\mathbb{C}$ contient un sous-corps isomorphe à $\overline{\mathbb{Q}(T)}$. Montrer que $\overline{\mathbb{Q}(T)}$ n'est isomorphe ni à $\bar{\mathbb{Q}}$, ni à $\mathbb{C}$.

6. Soient K un corps, Ω un corps algébriquement clos, et $\varphi : K \to \Omega$ un morphisme de corps.

(a) Soit $L \supseteq K$ une extension finie. Montrer qu'il existe un morphisme de corps $\psi : L \to \Omega$ tel que $\psi|_K = \varphi$.
Indication : commencer par traiter le cas où l'extension est monogène, *i.e.* il existe $\theta \in L$ tel que $L = K(\theta)$.

⋆ (b) Même question dans le cas où l'extension $L \supseteq K$ est algébrique.
Indication : utiliser l'exercice **4**(b) avec le théorème de Steinitz.

7. *Extensions normales.* On considère un corps K, un polynôme $P \in K[X]$ et L un corps de décomposition de P.

(a) Soit Ω une clôture algébrique de L. Montrer que pour tout K-morphisme de corps $\varphi : L \to \Omega$, on a $\varphi(L) = L$.

(b) On se propose de montrer la propriété suivante : quelque soit $Q \in K[X]$ irréductible, si Q a une racine dans L, alors Q est scindé dans L. On dit dans ce cas que L est une extension *normale* de K.

(i) Soit $Q \in K[X]$ un polynôme irréductible, ayant une racine β dans L. Soit $\gamma \in \Omega$ une autre racine de Q. Montrer que $K(\beta)$ et $K(\gamma)$ sont isomorphes.

(ii) Montrer qu'il existe un sous-corps L' de Ω contenant $K(\gamma)$ ainsi qu'un isomorphisme $\psi : L \to L'$ prolongeant l'isomorphisme entre $K(\beta)$ et $K(\gamma)$. **Indication :** utiliser l'exercice précédent.

(iii) Montrer que $L = L'$. Conclure.

(c) Réciproquement, soit L une extension algébrique finie et normale de K.

(i) Justifier qu'il existe $a_1, \ldots, a_m \in L$ tels que $L = K(a_1, \ldots, a_m)$.

(ii) Montrer que L est le corps de décomposition du polynôme $\prod_{i=1}^{m} \mathrm{Irr}(a_i, K)$.

8. Soient p un nombre premier positif et $P = X^4 + pX - p \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

(b) Montrer que P a exactement deux racines simples dans $\mathbb{R}$.

(c) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P et $L = \mathbb{Q}(\alpha)$ un corps de rupture de P, de sorte que $[L : \mathbb{Q}] = 4$. On se propose de montrer par l'absurde que L n'a pas de sous-corps non triviaux. On suppose qu'il existe un corps K tel que $L \supsetneq K \supsetneq \mathbb{Q}$. Montrer que dans $K[X]$ on a $P = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$, où $a, b, c, d \in K$.

(d) Établir que a^2 est racine du polynôme $Q = X^3 + 4pX - p^2 \in \mathbb{Q}[X]$.

(e) Montrer que Q n'a pas de racines dans $\mathbb{Q}$.

(f) En étudiant les degrés possibles de $\mathrm{Irr}(a^2, \mathbb{Q})$, montrer que Q admet une racine dans $\mathbb{Q}$. Conclure.

(g) On se propose maintenant de déterminer le degré $[E : \mathbb{Q}]$ où $E \subseteq \mathbb{C}$ est le corps de décomposition de P. Soient $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ et $\alpha_2 \in \mathbb{C}$ deux racines différentes de P et $a = -(\alpha_1 + \alpha_2)$. En reprenant l'argumentation ci-dessus, montrer que a^2 est racine du polynôme $Q = X^3 + 4pX - p^2$.

(h) Montrer que $[\mathbb{Q}(a^2) : \mathbb{Q}] = 3$ et $[\mathbb{Q}(\alpha_1) : \mathbb{Q}] = 4$. En déduire que $[E : \mathbb{Q}] = 24$.